

Théorème d'impossibilité d'Arrow

(sujet 34)

Dans un vote à majorité simple, un problème apparaît souvent : on peut préférer un candidat A à un candidat B, mais en présence d'un candidat C, voter tout de même pour le candidat B. Cela peut arriver par exemple si on se doute que le candidat A n'a que très peu de chance de gagner et que l'on préfère éviter que C ne soit élu. Les votes pour A seraient alors "perdus".

En formalisant le mécanisme d'élection en terme mathématique, on nomme indépendance des alternatives non-pertinentes la qualité d'un système de choix qui permettrait d'éviter cette situation : que le candidat C se présente ou non, on a toujours intérêt à voter pour A si on préfère A à B (et à C). Si on se base seulement sur l'ordre de préférence donné par les électeurs, le théorème d'impossibilité d'Arrow dit alors qu'il n'existe pas de mode d'élection basé qui garantisse :

- De toujours fournir un résultat
- De ne pas dépendre d'un seul électeur indépendamment des autres
- L'indépendance des alternatives non-pertinentes

Le travail proposé est d'étudier les notions nécessaires pour pouvoir comprendre et énoncer précisément le théorème d'Arrow, d'illustrer ces notions avec différents systèmes de vote et de présenter une démonstration du théorème.

Luc Genton